TD n° 6 : Transformation de Laplace inverse

Exercice 1

Déterminer les originaux de

- $\dfrac{1}{p\,(p-1)\,(p^2-4)}$
- $\dfrac{e^{-p}}{p\,(p-1)}$
- $\dfrac{1}{p}\,\dfrac{1}{p-e^{-p}}$ (effectuer un dévelop^ent en série entière vis-à-vis de la variable $\dfrac{e^{-p}}{p}$)

Exercice 2

Résoudre $x'' + 2x' + x = f(t)$ avec $x(0) = x'(0) = 0$

1) Déterminer la transformée de Laplace de x en fonction de celle de f.

2) Exprimer $x(t)$ sous la forme d'un produit de convolution.

3) Application : déterminer explicitement $x(t)$ pour $f(t) = \dfrac{e^{-t}}{1+at}$

Exercice 3

On considère $\qquad f(t) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(tu)}{a^2+u^2}\,du$

1) Déterminer la transformée de Laplace de $\cos(tu)$ par rapport à la variable t.

2) Déterminer la transformée de Laplace de f, puis l'expression (simple) de $f(t)$.

Exercice 4

Trouver les valeurs de $f(0+), f'(0+)$ et $f''(0+)$ si $\mathbf{1}\, f(p) = \hat{f}(p) = \dfrac{1}{p\,(p-1)\,(p^2+4)}$

Exercice 5

Résoudre le système différentiel linéaire suivant :

$$\begin{cases} x'' = 3(-x+y+z) & x(0)=0,\ x'(0)=0 \\ y'' = x - y & y(0)=0,\ y'(0)=-1 \\ z'' = -z & z(0)=1,\ z'(0)=0 \end{cases}$$

Exercice 6

Résoudre l'équation de Volterra suivante (où figure un produit de convolution) :

$$f(x) = x - \int_0^x Sh\,(x-t)\,f(t)\,dt$$

Exercice 7

Résoudre le système d'équations intégrales suivant :

$$\begin{cases} f_1(x) = e^x + \displaystyle\int_0^x f_1(t)\,dt - \int_0^x e^{x-t} f_2(t)\,dt \\ f_2(x) = -x - \displaystyle\int_0^x (x-t)\,f_1(t)\,dt + \int_0^x f_2(t)\,dt \end{cases}$$